



Control No Lineal para la Alimentación de Oxígeno de una Celda de Combustible

A. Castellanos-Silva*, J. Reyes-Reyes**, V. M. Alvarado*

*Centro Nacional de Investigación y Desarrollo Tecnológico

Int. Palmira, Cuernavaca, Mor. 62490, México. Teléfono: 01(777) 362-7770

Correo: abraham.cs@gmail.com

**Instituto Tecnológico de Zacatepec

Calzada Tecnológico No. 27, Zacatepec, Mor. 62780, México.

Resumen—El artículo describe un sistema de alimentación basado en celdas de combustible, al cual se le suministra oxígeno a través de un compresor. El compresor puede presentar problemas de saturación durante transitorios rápidos de corriente. Se diseñó un controlador no lineal para la regulación de la concentración de oxígeno en el cátodo, que permite un desempeño estable del compresor, así como evitar que la presión parcial de oxígeno decaiga. El controlador diseñado está basado en una función de Lyapunov, con el propósito de considerar las no linealidades del sistema. Se incluyeron resultados de simulación para demostrar el desempeño del controlador diseñado. Los resultados fueron comparados con otros trabajos previos en la literatura, cuyos objetivos son similares.

Palabras clave: Control No Lineal, Celdas de Combustible, función de Lyapunov.

I. INTRODUCCIÓN

Las celdas de combustible representan una alternativa viable para la generación de energía eléctrica de manera ecológica. De los diferentes tipos de Celdas de Combustible (CC), las de Membrana de Intercambio Protónico PEM (por sus siglas en inglés *Proton Exchange Membrane*), son las mejor situadas para aplicaciones móviles, dada su baja temperatura de operación (alrededor de 80 °C), su densidad de energía y una alta eficiencia (Barbir, 2005), (Srinivasan, 2006) y (Larminie y Dicks, 2003).

Dadas sus características electroquímicas, térmicas y mecánicas, este tipo de dispositivos requieren de una serie de complementos auxiliares que les permitan una operación segura y aceptable (Larminie y Dicks, 2003). Dentro de estos complementos, podemos encontrar intercambiadores de calor, humidificadores y compresores, entre otros. Este último, posee un papel determinante para la correcta operación de la CC, ya que es el encargado de proveer oxígeno al sistema, que funge como oxidante para la reacción electroquímica, encargada de generar la electricidad. Debido a que el oxígeno reacciona de manera instantánea con la demanda de corriente, es importante tener un esquema de control que suministre el oxígeno necesario para la reacción, a la vez que mantiene su concentración en un nivel seguro. Lo anterior corresponde al hecho de que si la presión parcial de oxígeno decae, se puede presentar el fenómeno conocido

como *starvation* o insuficiencia de oxígeno, cuyos efectos son nocivos para la CC. Aunado a esto, la aplicación de excesivos esfuerzos de control al compresor, con el objetivo de evitar una baja en la presión parcial de oxígeno, puede derivar en un comportamiento inestable del sistema, lo cual implicaría una disminución en el desempeño del mismo.

Ante esta problemática se han desarrollado diversos trabajos con el objetivo de evitar la aparición del fenómeno *starvation*, así como también abordar la problemática de la operación estable del compresor.

Uno de los primeros trabajos desarrollados es el de (Pukrushpan, et. al., 2002), en donde se propone un modelo matemático no lineal de la CC y sus componentes auxiliares; en este trabajo se utilizan técnicas de control lineal, como lo es el control óptimo (LQR) o una prealimentación dinámica (dFF), para regular la concentración de oxígeno. En (Sun y Kolmanovsky, 2005) se diseñó un gobernador de carga para evitar la aparición de este fenómeno, considerando el modelo no lineal desarrollado por Pukrushpan. En (Suh y Stefanopoulou, 2005) utilizan los esquemas de control de (Pukrushpan, et. al., 2002), junto con la inclusión de un convertidor CD-CD, logrando un compromiso entre el control del convertidor y la alimentación de aire. En (Vahidi, et. al., 2006), se propone un esquema de control predictivo acompañado de una configuración híbrida de ultra capacitores, con el objetivo de que los ultra capacitores absorban los transitorios de corriente. En (Vahidi, et. al., 2007), utilizan un enfoque de gobernador de referencia rápido para reforzar la operación estable del compresor. Por lo cual, el objetivo que se persigue en este artículo es: diseñar un controlador no lineal para regular la concentración de oxígeno en el cátodo ante perturbaciones en la carga, además de, asegurar la operación estable del compresor.

El artículo se estructura de la siguiente manera: en la sección I se da la introducción y planteamiento del problema a abordar; en la sección II se expone el modelo matemático considerado para el diseño del controlador, basado en una función de Lyapunov para control, cuyo desarrollo se ve en la sección III. Posteriormente, se muestran los resultados obtenidos de simulaciones en la sección IV para después, pasar a las conclusiones pertinentes en la sección V.

II. MODELO MATEMÁTICO DE LA CELDA DE COMBUSTIBLE

El modelo matemático utilizado en este artículo fue desarrollado en (Pukrushpan, et. al., 2002), el cual se basa en principios electroquímicos, termodinámicos y de mecánica de fluidos. Este modelo es de parámetros concentrados y representa la hidratación de la membrana, el flujo en el ánodo y el cátodo, así como el voltaje del apilamiento. En este modelo se incluyen los componentes auxiliares tales como el compresor, dinámicas del distribuidor de suministro y colector de salida, sistema de enfriamiento y de humidificación. Se desprecian dinámicas lentas asociadas a la regulación de temperatura y disipación de calor. Se asume que la temperatura es regulada por un sistema externo que no se aborda en este artículo, a la vez que los flujos de entrada de reactivos en el cátodo y el ánodo pueden ser humidificados, calentados y enfriados de manera rápida y consistente. Las variables asociadas al cátodo llevan el sufijo *ca*, y las que están relacionadas al ánodo llevan el sufijo *an*. Asimismo, las correspondientes al distribuidor de suministro utilizan *sm*, y las del colector de salida *rm*. El sufijo *cp* es para el compresor, *cm* es para el motor del compresor y *st* es para el apilamiento de celdas de combustible. Además, el sufijo O_2 se utiliza para las variables que tengan que ver con el oxígeno, N_2 para el nitrógeno y H_2 para el hidrógeno.

La masa (kg) es denotada con la letra *m*, el flujo másico (kg/seg) con la letra *W*, la presión (Pa) con *p*, la temperatura (K) con *T*, la velocidad rotacional (rad/seg) con ω , la corriente (A) con *I*, la masa molar (kg/mol) con *M*, el volumen (m^3) con *V* y el voltaje (V) con *v*.

El modelo contiene 9 variables de estado, las cuales son: la masa de oxígeno en el cátodo (m_{O_2}), la masa de nitrógeno en el cátodo (m_{N_2}), la masa de agua en el cátodo ($m_{w,ca}$), la masa de hidrógeno en el ánodo (m_{H_2}), la masa de agua en el ánodo ($m_{w,an}$), la velocidad rotacional del compresor (ω_{cp}), la presión del distribuidor de suministro (p_{sm}), la masa del distribuidor de suministro (m_{sm}) y la presión del colector de salida (p_{rm}).

Se utiliza el principio de conservación de masa para obtener las ecuaciones que gobiernan a la masa de oxígeno, nitrógeno, hidrógeno, agua en el cátodo y ánodo.

$$\frac{dm_{O_2}}{dt} = W_{O_2,in} - W_{O_2,out} - W_{O_2,react} \quad (1)$$

$$\frac{dm_{N_2}}{dt} = W_{N_2,in} - W_{N_2,out} \quad (2)$$

$$\frac{dm_{H_2}}{dt} = W_{H_2,in} - W_{H_2,out} - W_{H_2,react} \quad (3)$$

$$\frac{dm_{w,ca}}{dt} = W_{v,ca,in} - W_{v,ca,out} + W_{v,gen} + W_{v,mem} \quad (4)$$

$$\frac{dm_{w,an}}{dt} = W_{v,an,in} - W_{v,an,out} - W_{v,mem} \quad (5)$$

La dinámica del compresor es gobernada por la inercia conjunta del compresor-motor J_{cp} , resultando en la siguiente ecuación:

$$J_{cp} \frac{d\omega_{cp}}{dt} = (\tau_{cm} - \tau_{cp}) \quad (6)$$

La tasa de cambio de masa dentro del distribuidor de suministro está gobernada por el principio de conservación de masa y la tasa de cambio de presión del distribuidor de suministro por el de conservación de energía, como sigue:

$$\frac{dm_{sm}}{dt} = W_{cp} - W_{sm,out} \quad (7)$$

$$\frac{dp_{sm}}{dt} = \frac{\gamma R_a}{V_{sm}} (W_{cp} T_{cp,out} - W_{sm,out} T_{sm}) \quad (8)$$

La presión del colector de salida es gobernada por el principio de la conservación de masa y la ley de los gases ideales a través de suposiciones isotérmicas:

$$\frac{dp_{rm}}{dt} = \frac{R_a T_{rm}}{V_{rm}} (W_{ca,out} - W_{rm,out}) \quad (9)$$

Por consideraciones de espacio, se obvia el desarrollo correspondiente a cada término que compone a cada una de las ecuaciones 1 a 9, exceptuando 6 y 8, las cuales serán utilizadas más adelante. Para más detalles sobre estas ecuaciones, los parámetros y constantes a utilizar, referirse a (Pukrushpan, et. al., 2004).

Las ecuaciones 6 y 8 son de importancia, debido a que están relacionadas al flujo de aire que se le suministra al sistema. Por lo que, influyen en el comportamiento del oxígeno en el cátodo y por consiguiente, serán las que se aborden de manera específica.

En la figura 1 se puede observar la estructura general que guarda el sistema descrito por el modelo matemático, además de indicar la entrada de control para el flujo de aire v_{cm} , así como también indica el control de la presión de hidrógeno. Este último, se logra utilizando un control proporcional junto con el error de presión que exista entre el ánodo y la presión del distribuidor de suministro. Esto es posible dado que se considera que existe un tanque presurizado que alimenta de hidrógeno al sistema.

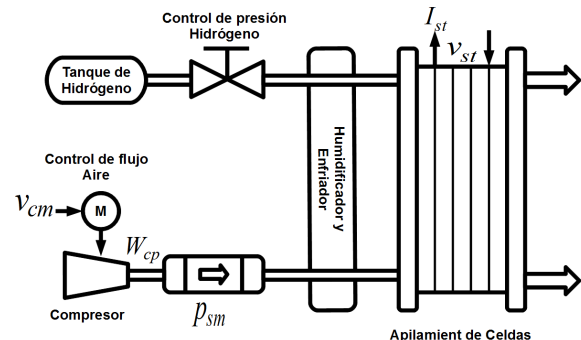


Figura 1. Estructura del sistema

La concentración de oxígeno en el cátodo es definida a través del parámetro llamado *razón de exceso de oxígeno*, representado por λ_{O_2} , cuya ecuación es la siguiente:

$$\lambda_{O_2} = \frac{W_{O_2,in}}{W_{O_2,react}} \quad (10)$$

Donde $W_{O_2,in}$ es el flujo de oxígeno dentro del cátodo y $W_{O_2,react}$ es la tasa de oxígeno que reacciona en el cátodo. Es a través de este parámetro que se puede indicar la aparición de la insuficiencia de oxígeno, ya que valores bajos de λ_{O_2} indican baja concentración de oxígeno. La tasa de oxígeno que reacciona depende de la corriente demandada al sistema I_{st} , expresada en la siguiente ecuación:

$$W_{O_2,react} = M_{O_2} \frac{nI_{st}}{4F} \quad (11)$$

mientras que $W_{O_2,in}$ depende del flujo que sale del distribuidor de suministro $W_{sm,out}$, que a su vez, depende del flujo másico de aire que entrega el compresor W_{cp} . Por lo tanto, si la tasa de alimentación de aire se mantiene constante, la concentración de oxígeno decaerá conforme la corriente demandada al sistema aumente. Para evitar esto, más aire debe ser suministrado conforme a la demanda de corriente y es en este punto donde entra el compresor, es decir, el sistema de control debe modificar el flujo que el compresor entrega para poder reabastecer al sistema de oxígeno. La estructura general que guarda el modelo matemático se muestra a continuación:

$$\dot{x} = f(x) + g(x, w) + Bu + Bw \quad (12)$$

Donde se puede observar que las no linealidades recaen en la dinámica de los estados y en la forma en que se presenta la perturbación, no así para la entrada de control que es lineal. La entrada de control considerada es el voltaje aplicado al motor del compresor v_{cm} .

III. DISEÑO DEL CONTROLADOR NO LINEAL

III-A. Preliminares

Considere cuatro espacios Euclidianos de dimensión finita: el espacio de estados \mathcal{X} , el espacio de control \mathcal{U} , el espacio de perturbación \mathcal{W} y el espacio de mediciones \mathcal{Y} . Dada una función continua $f: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{W} \times \mathcal{Y} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{X}$, se forma una ecuación diferencial de la forma:

$$\dot{x} = f(x, u, w, t) \quad (13)$$

Donde $x \in \mathcal{X}$ es la variable de estado, $u \in \mathcal{U}$ es la entrada de control, $w \in \mathcal{W}$ es la perturbación de entrada y $t \in \mathbb{R}$ es la variable (tiempo) independiente (Freeman y Kokotovic, 1996). La función f junto con los tres espacios \mathcal{U} , \mathcal{W} y \mathcal{Y} comprenden un sistema $\Sigma = (f, \mathcal{U}, \mathcal{W}, \mathcal{Y})$. Se dice que un sistema de la forma anterior, es invariante en el tiempo cuando los mapeos f , \mathcal{U} , \mathcal{W} y \mathcal{Y} son todos independientes de t . En este caso, se abusa de la notación y se escribe $f(x, u, w)$, $\mathcal{U}(y)$, $\mathcal{W}(x, u)$ y $\mathcal{Y}(x)$. Entonces, si es posible definir una función $V(x)$ que sea continua, definida positiva y radialmente desacotada, tal que bajo los

siguientes teoremas (Marquez, 2003), se pueda probar la estabilidad del sistema 13, es posible obtener una ley de control a partir de $V(x)$.

Teorema 1: (Estabilidad de Lyapunov) Sea $x = 0$ un punto de equilibrio para $\dot{x} = f(x, u, w)$ (sin pérdida de generalidad dado que el origen se puede trasladar a cualquier punto del espacio a través de un cambio de variable). Si $V: \mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{W} \times \mathcal{Y} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable, tal que:

- I. $V(0) = 0$.
- II. $V(x) > 0$ en $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{W} \times \mathcal{Y} - \{0\}$.
- III. $\dot{V}(x) \leq 0$ en $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{W} \times \mathcal{Y} - \{0\}$.

Entonces, $x = 0$ es estable.

Teorema 2: (Estabilidad asintótica) Si además de cumplirse I y II, se tiene que:

- IV. $\dot{V}(x) < 0$ en $\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{W} \times \mathcal{Y} - \{0\}$.

Entonces, $x = 0$ es asintóticamente estable.

Teorema 3: (Estabilidad asintótica global) Si además de cumplirse I, II y IV, $V(x)$ es radialmente desacotada, esto es:

$$V(x) \rightarrow \infty \text{ como } \|x\| \rightarrow \infty \quad (14)$$

Entonces $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable.

III-B. Formulación de la Función de Lyapunov para Control

A partir de los teoremas anteriores, se procede a formular una función de Lyapunov para control (FLC), cuyo objetivo sea la regulación de la concentración de oxígeno en el cátodo. Para lograr esto, la función de Lyapunov debe estar propuesta en términos que dependan de la o las variables de estado que posean grado relativo uno con la entrada de control, con el objetivo de utilizar la entrada de control como parámetro libre de diseño y lograr que la derivada de $V(x)$ sea menor que cero. Para formular la función de Lyapunov se utilizó el flujo másico del compresor (W_{cp}), debido a las siguientes consideraciones:

- W_{cp} depende la velocidad angular del compresor (ω_{cp}), cuyo grado relativo con la entrada de control es uno.
- Se puede calcular un flujo *deseado* a partir de la corriente demandada y del valor de la concentración requerida.
- Se tiene todo el estado disponible para medición.

La ecuación que calcula el flujo *deseado* se encuentra en (Pukrushpan, et. al., 2004), dicha ecuación relaciona la concentración de oxígeno en el cátodo, la corriente demandada y el flujo másico del compresor, como se muestra a continuación:

$$W_{cp}^d = \left(1 + \frac{M_v p_{sat}(T_{atm})}{M_a (p_{atm} - p_{sat}(T_{atm}))} \right) \frac{\lambda_{O_2} M_{O_2} n I_{st}}{X_{O_2} 4F} \quad (15)$$

El superíndice d , se utiliza para denotar que se trata de un flujo másico *deseado*, es decir, esta ecuación arroja el cálculo del flujo másico del compresor requerido para obtener

una concentración dada, ante una corriente demandada. En esta ecuación, $p_{sat}(\cdot)$ indica la presión de saturación a una temperatura específica, la cual es calculada a través de un polinomio en (Pukrushpan, et. al., 2004). La única variable a considerar, es la corriente del apilamiento, ya que se busca que la concentración se mantenga fija a un valor de 2, como lo propuesto en (Pukrushpan, et. al., 2002).

Entonces se propone la siguiente FLC:

$$V_w = \frac{1}{2} (W_{cp} - W_{cp}^d)^2 \quad (16)$$

al formular la FLC de esta manera lo que se busca es que cuando la función alcance su mínimo valor, el flujo másico del compresor tienda al flujo deseado, con lo cual se consigue que la concentración se regule a un valor de 2.

El vector de estados del sistema 12 se define entonces como sigue:

$$\begin{bmatrix} m_{O_2} & m_{H_2} & m_{N_2} & \omega_{cp} & p_{sm} & \dots \\ \dots & m_{sm} & m_{w,an} & p_{rm} & m_{w,ca} & \dots \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

y a partir de esta asignación de estados, se procede a obtener la derivada de la función 16, en donde se considera que W_{cp}^d es constante por lo que su derivada es cero, entonces se llega a la siguiente representación:

$$\dot{V}_w = (W_{cp} - W_{cp}^d) \begin{bmatrix} \frac{\partial W_{cp}}{\partial x_4} & \frac{\partial W_{cp}}{\partial x_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Lo anterior debido a que la derivada parcial de W_{cp} con respecto a las demás variables de estado es cero, debido a que está en función únicamente de x_4 y x_5 . Con el procedimiento anterior, se logra que la entrada de control v_{cm} aparezca en la derivada de la FLC, lo que nos permite utilizarla como parámetro libre de diseño y a través de ella, lograr que 18 se defina negativa, asegurando la estabilidad del sistema y que el flujo másico del compresor converja a un valor deseado, repercutiendo en la regulación de la concentración de oxígeno a un valor constante.

Las derivadas parciales de W_{cp} con respecto a x_4 y x_5 son las siguientes:

$$\frac{\partial W_{cp}}{\partial x_4} = c_1 n_8 (1 - n_7) x_4 - c_1 n_1 n_{16} n_7 x_4 + c_1 n_1 (1 - n_7) \quad (19)$$

$$\frac{\partial W_{cp}}{\partial x_5} = -c_{32} \frac{n_1 n_2 n_7}{n_{13}} \quad (20)$$

Los términos n_1, n_2, \dots, n_{16} , agrupan las no linealidades del sistema y las c_1, c_2, \dots, c_{33} se utilizan para las constantes y parámetros del modelo. En las Tablas II y III, ubicadas en los anexos, se encuentra esta notación simplificada. Asimismo, las ecuaciones 6 y 8 se reescriben como se muestra a continuación para facilitar su manipulación; en ellas los términos a_1, a_2 , y a_3 , así como b_1, b_2, \dots, b_7 son constantes o parámetros del modelo.

$$\dot{x}_4 = a_1 u - a_2 x_4 - a_3 n_3 n_1 (1 - n_7) \quad (21)$$

$$\dot{x}_5 = b_1 n_1 (1 - n_7) x_4 n_{14} - \frac{b_4 n_{15} x_5}{x_6} \quad (22)$$

Utilizando esta notación, se reescribe la derivada de V_w , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{V}_w = & (W_{cp} - W_{cp}^d) ((a_1 u - a_2 x_4 - a_3 n_3 n_1 (1 - n_7)) \dots \\ & \dots (c_1 n_8 (1 - n_7) x_4 - c_1 n_1 n_{16} n_7 x_4 + \dots \\ & \dots + c_1 n_1 (1 - n_7)) + \left(-c_{32} \frac{n_1 n_2 n_7}{n_{13}} \right) \dots \\ & \dots \left(b_1 n_1 (1 - n_7) x_4 n_{14} - \frac{b_4 n_{15} x_5}{x_6} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

III-C. Ley de control para la alimentación de oxígeno de una celda de combustible

Una vez formulada la FLC, se procede a obtener la ley de control, a partir del hecho de forzar que la derivada de V_w sea definida negativa. Para lo cual se propone el siguiente teorema:

Teorema 4: Sea $W_{cp} - W_{cp}^d = 0$ un punto de equilibrio para el sistema 12. Si 16 es una función de Lyapunov para el sistema 12, y bajo las condiciones del Teorema 3, la derivada de la función 16 será definida negativa si

$$\begin{aligned} u = & (a_3 c_1 n_1 n_{13} x_6 (-n_3 n_8 x_4 + 2 n_2 n_8 x_4 n_7 - \dots \\ & \dots - n_3 n_8 x_4 n_7^2 - a_2 a_3^{-1} n_8 x_4^2 n_1^{-1} - n_1 n_3 + \dots \\ & \dots + a_2 a_3^{-1} n_{16} n_7 x_4^2 - a_2 a_3^{-1} x_4 + a_2 a_3^{-1} x_4 n_7 + \dots \\ & \dots + n_1 n_3 n_{16} n_7 x_4 - n_1 n_3 n_{16} n_7^2 x_4 + 2 n_1 n_3 n_7 - \dots \\ & \dots - n_1 n_3 n_7^2) + a_2 c_1 n_8 x_4^2 n_{13} x_6 n_7 + c_{32} b_4 n_{15} x_5 - \dots \\ & \dots - c_{32} b_1 n_1 x_4 n_{14} x_6 + c_{32} b_1 n_1 x_4 n_{14} x_6 n_7 + \dots \\ & \dots + K n_{13} x_6 (W_{cp} - W_{cp}^d) / (n_{13} x_6 a_1 c_1 (-n_8 x_4 + \dots \\ & \dots + n_8 x_4 n_7 + n_1 n_{16} n_7 x_4 - n_1 + n_1 n_7)) \end{aligned} \quad (24)$$

Entonces, el punto de equilibrio, $W_{cp} - W_{cp}^d = 0$ es asintóticamente estable.

Al diseñar la ley de control de esa manera se tiene que:

$$\dot{V}_w = -K (W_{cp} - W_{cp}^d)^2 \quad (25)$$

por lo que, si se selecciona $K > 0$ y dado que la diferencia entre W_{cp} y W_{cp}^d se eleva al cuadrado, se asegura que $\dot{V}_w < 0$. Con lo anterior se asegura la estabilidad del sistema en el punto de equilibrio, el cual corresponde al objetivo de control, logrando con esto, que el $W_{cp} \rightarrow W_{cp}^d$, lo que implica que $\lambda_{O_2} \rightarrow 2$.

IV. RESULTADOS

Se implementó la ley de control, diseñada en el apartado anterior, en Simulink® de MATLAB®, aplicado al modelo no lineal de la Sección II. El perfil de la corriente demandada al sistema, el voltaje aplicado al compresor y la concentración de oxígeno en el cátodo, se muestran en la figura 2. Esta figura corresponde a los resultados obtenidos. En la parte de arriba se muestra el perfil de la perturbación, en medio la señal de control y en la parte inferior, la concentración de oxígeno (objetivo de control).

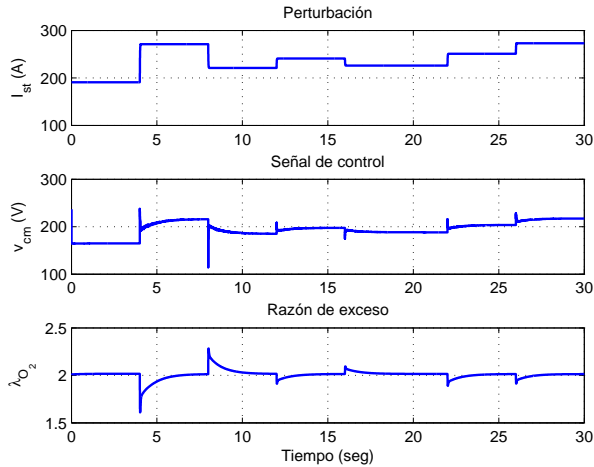


Figura 2. Comportamiento del sistema

Como se puede apreciar, la concentración se regula a un valor de 2, a pesar de que el sistema enfrenta un perfil de perturbación cambiante. El cambio más grande de la perturbación, a los 4 segundos, en donde su magnitud pasa de 191 A a 271 A, provoca únicamente una disminución de 0.4 en la razón de exceso de oxígeno, manteniendo su valor por encima de 1, que es en donde se puede presentar el fenómeno de la insuficiencia de oxígeno. Ante este mismo perfil de perturbación, se prueban los controladores propuestos en (Pukrushpan, et. al., 2002) y en (Pukrushpan, et. al., 2004), los cuales utilizan técnicas lineales y como se puede apreciar en la figura 3, la regulación de la concentración fue realizada de mejor manera por el controlador no lineal (CNL), incluso minimizando los efectos de los transitorios de corriente, que provocan que la razón de exceso baje de manera súbita. En las figuras 3 y 4, las siglas LQR y dFF son para indicar los controladores de la literatura y CNL es para el controlador no lineal propuesto en este artículo.

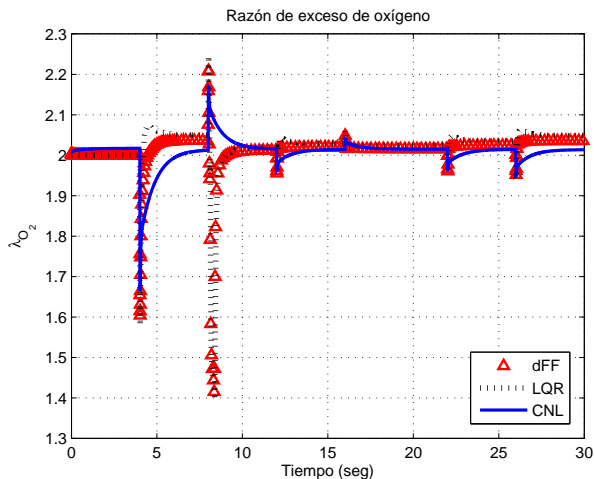


Figura 3. Comparación con los controladores de la literatura

La diferencia en el cumplimiento del objetivo de control es sustancial, debido a que en el instante de tiempo correspondiente a 8 segundos, cuando la perturbación pasa de 271 A a 231 A, el CNL logra llevar de manera suave a la razón de exceso a su valor deseado, mientras que los controladores lineales (LQR y dFF) tienen un efecto transitorio que provoca que λ_{O_2} decaiga a 1.4, reflejándose esto en el mapa del compresor, como lo muestra la figura 4. Ese efecto transitorio afecta la operación estable del compresor, ya que los límites de operación son superados. Estos límites están representados en la figura a través de unas líneas. Dichos límites se estudian en (Sun y Kolmanovsky, 2005), así como en (Vahidi, et. al., 2006) y en (Vahidi, et. al., 2007). La superación de estos límites por parte de los controladores basados en técnicas lineales, puede provocar que el compresor se dañe o no cumpla su función de reabastecer al sistema de oxígeno, provocando una disminución en el desempeño global del sistema. Debido a esto, adquiere relevancia lo logrado por el CNL, ya que fue posible operar dentro de la zona estable mientras se lograba la regulación de λ_{O_2} . Esto último es debido a que el CNL genera señales de control con un comportamiento menos abrupto, provocando con esto que el comportamiento de λ_{O_2} sea suave, en comparación con lo logrado por los controladores LQR y dFF.

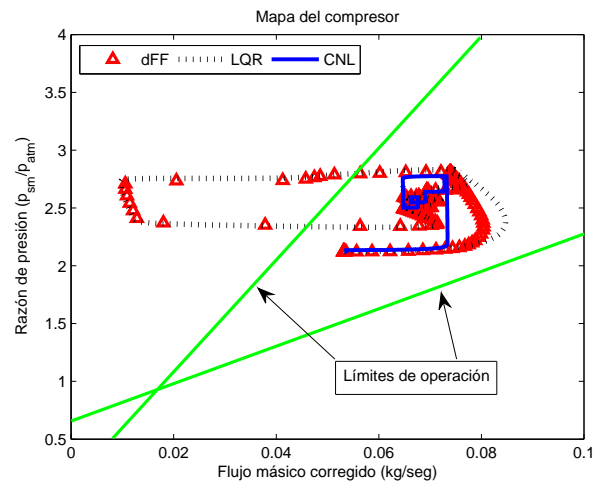


Figura 4. Comparación del mapa del compresor

Para evaluar el desempeño del controlador de una manera cuantitativa, se utilizan índices de desempeño basados en el error existente entre la razón de exceso deseada y la razón de exceso del sistema. Los índices de desempeño elegidos son: la integral del error al cuadrado y la integral del valor absoluto del error, ISE e IAE, respectivamente, por sus siglas en inglés *Integral Square Error* e *Integral Absolute Error*. Los resultados de estos índices se encuentran en la Tabla I. En dichos índices, una menor magnitud indica un mejor desempeño del sistema de control.

TABLA I
ÍNDICES DE DESEMPEÑO

Índice de desempeño	CNL (propuesto)	LQR	dFF
ISE	0.04445	0.171	0.1224
IAE	0.5173	1.305	0.9903

Como se puede constatar en la tabla, los índices logrados por CNL son menores que los obtenidos por LQR o dFF, esto quiere decir, que el error existente entre la razón de exceso deseada y la razón existente en el sistema, es menor para CNL que para los dos controladores lineales.

V. CONCLUSIONES

Como se pudo observar a lo largo del desarrollo de este trabajo, una FLC es una herramienta útil en el diseño de esquemas de control para sistemas no lineales, debido a que considera la no linealidad del sistema y permite utilizarla en la síntesis de la ley de control. Además, al estar basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov, permite determinar la estabilidad del sistema sin la necesidad de resolver las ecuaciones diferenciales, aunado al hecho de que es aplicable a sistemas lineales como no lineales, invariantes como invariantes en el tiempo.

El desarrollo del controlador no lineal, permitió una operación estable del compresor, sin saturar el voltaje de alimentación, para respetar las restricciones que presentan este tipo de dispositivos, repercutiendo en la estabilidad de todo el sistema, a la vez que se lograba el cumplimiento del objetivo de control, el cual era la regulación de λ_{O_2} a un valor constante.

Por otro lado, para poder utilizar una FLC se requiere conocer el modelo matemático del sistema, lo cual implica que la ley de control diseñada esté sujeta al comportamiento de los parámetros del sistema. Otro punto a considerar es el hecho de que proponer una FLC no siempre es posible. En este trabajo no se consideraron posibles incertidumbres paramétricas que pudieran presentarse, lo cual podría abordarse en trabajos futuros.

REFERENCIAS

Barbir, F. (2005) *PEM Fuel Cells: Theory and Practice*. Elsevier Academic Press, USA.

Freeman, R. A. y Kokotovic, P. V. (1996) *Robust Nonlinear Control Design: State-space and Lyapunov Techniques*. Birkhäuser, Boston.

Larminie, J. y Dicks, A. (2003) *Fuel Cell Systems Explained*. 2da Edición. Wiley & Sons, New Jersey.

Marquez, Horacio J. (2003) *Nonlinear Control Systems: Analysis and Design*. Wiley & Sons, New Jersey.

Pukrushpan, J. T., Stefanopoulou, A. G. y Huie Peng. (2004) *Control of Fuel Cell Power Systems: Principles, Modeling, Analysis and Feedback Design*. Springer, Londres.

Pukrushpan, J. T., Stefanopoulou, A. G. y Huie Peng. (2002) Modeling and Control for PEM Fuel Cell Stack System. *Proceedings of the American Control Conference 2002* 4, 3117–3122.

Sun, J. y Kolmanovsky, I. V. (2005) Load Governor for Fuel Cell Oxygen Starvation Protection: A Robust Nonlinear Reference Governor Approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology* 13, No. 6, 911–920.

Suh, K. W. y Stefanopoulou A. G. (2005) Coordination of Converter and Fuel Cell Controllers. *Proceedings of the 2005 IEEE International Symposium on Intelligent Control, Mediterrean Conference on Control and Automation*. 563–568.

Srinivasan, S. (2006) *Fuel Cells: From Fundamentals to Applications*. Springer, USA.

Vahidi, A., Stefanopoulou A. G. y Huie Peng (2006) Current Management in a Hybrid Fuel Cell Power System: A Model-Predictive Control Approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 14, 563–568.

Vahidi, A., Kolmanovsky, I. y Stefanopoulou, A.G. (2007) Constraint Handling in a Fuel Cell System: A Fast Reference Governor Approach. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 15, 86–98.

ANEXOS

TABLA II
NOTACIÓN SIMPLIFICADA DE LAS CONSTANTES DEL MODELO
PROPUESTO POR PUKRUSHPAN ET. AL. 2002

$a_1 = \frac{\eta_{cm} k t}{J_{cp} R_{cm}}$	$a_2 = \frac{\eta_{cm} k t k v}{J_{cp} R_{cm}}$
$a_3 = \frac{C_p T_{atm} \delta \pi \rho_a d_c^3}{8 \eta_{cp} \theta J_{cp}}$	$b_1 = \frac{\gamma R_a \delta \pi \rho_a d_c^3}{8 \theta V_{an}}$
$b_2 = T_{atm} - \frac{T_{atm}}{\eta_{cp}}$	$b_3 = \frac{T_{atm}}{\eta_{cp}} \left(\frac{1}{p_{atm}} \right)^{c_{12}}$
$b_4 = \gamma k_{sm, out}$	$b_5 = \frac{R_{ca}}{V_{ca}} T_{st}$
$b_6 = \frac{R_{N_2} T_{st}}{V_{ca}}$	$b_7 = \frac{R_{ca} T_{st}}{V_{ca}}$
$c_1 = \frac{\delta \pi \rho_a d_c^3}{8 \theta}$	$c_2 = \frac{\Phi_4 d_c^4}{16 (\theta \gamma R_a T_{atm})^2}$
$c_3 = \frac{\Phi_3 d_c^3}{8 (\theta \gamma R_a T_{atm})^{3/2}}$	$c_4 = \frac{\Phi_2 d_c^2}{4 \theta \gamma R_a T_{atm}}$
$c_5 = \frac{\Phi_1 d_c}{2 \sqrt{\theta \gamma R_a T_{atm}}}$	$c_6 = \Phi_0$
$c_7 = \frac{\beta_2 d_c^2}{4 \theta \gamma R_a T_{atm}}$	$c_8 = \frac{\beta_1 d_c}{2 \sqrt{\theta \gamma R_a T_{atm}}}$
$c_9 = \beta_0$	$c_{10} = \frac{8 C_p T_{atm} \theta}{d_c^2}$
$c_{11} = \left(\frac{1}{p_{atm}} \right)^{c_{12}}$	$c_{12} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$
$c_{13} = \frac{\Psi_5 d_c^5}{32 (\theta \gamma R_a T_{atm})^{5/2}}$	$c_{14} = \frac{\Psi_4 d_c^4}{16 (\theta \gamma R_a T_{atm})^2}$
$c_{15} = \frac{\Psi_3 d_c^3}{8 (\theta \gamma R_a T_{atm})^{3/2}}$	$c_{16} = \frac{\Psi_2 d_c^2}{4 (\theta \gamma R_a T_{atm})}$
$c_{17} = \frac{\Psi_1 d_c}{2 \sqrt{\theta \gamma R_a T_{atm}}}$	$c_{18} = \Psi_0$
$c_{19} = \frac{M_{O_2} n}{4 F}$	$c_{20} = \frac{\Phi_4 d_c^4}{4 (\theta \gamma R_a T_{atm})^2}$
$c_{21} = \frac{3 \Phi_3 d_c^3}{8 (\theta \gamma R_a T_{atm})^{3/2}}$	$c_{22} = \frac{\Phi_2 d_c^2}{2 (\theta \gamma R_a T_{atm})}$
$c_{23} = \frac{\Phi_1 d_c}{2 \sqrt{\theta \gamma R_a T_{atm}}}$	$c_{24} = \frac{\beta_2 d_c^2}{2 (\theta \gamma R_a T_{atm})}$
$c_{25} = \frac{\beta_1 d_c}{2 \sqrt{\theta \gamma R_a T_{atm}}}$	$c_{26} = -16 C_p T_{atm} \theta$
$c_{27} = \frac{5 \Psi_5 d_c^5}{32 (\theta \gamma R_a T_{atm})^{5/2}}$	$c_{28} = \frac{\Psi_4 d_c^4}{4 (\theta \gamma R_a T_{atm})^2}$
$c_{29} = \frac{3 \Psi_3 d_c^3}{8 (\theta \gamma R_a T_{atm})^{3/2}}$	$c_{30} = \frac{\Psi_2 d_c^2}{2 (\theta \gamma R_a T_{atm})}$
$c_{31} = \frac{\Psi_1 d_c}{2 \sqrt{\theta \gamma R_a T_{atm}}}$	$c_{32} = \frac{\delta \pi \rho_a d_c C_p T_{atm} (\gamma - 1) \left(\frac{1}{p_{atm}} \right)^{c_{12}}}{\gamma}$
$c_{33} = 1 - c_{12}$	

TABLA III

NOTACIÓN SIMPLIFICADA DE LAS NO LINEALIDADES DEL MODELO
PROPUESTO POR PUKRUSHPAN ET. AL. 2002

$n_1 = c_2 x_4^4 + c_3 x_4^3 + c_4 x_4^2 + c_5 x_4 + c_6$
$n_2 = c_7 x_4^2 + c_8 x_4 + c_9$
$n_3 = c_{11} x_5^2$
$n_4 = c_{13} x_4^5 + c_{14} x_4^4 + c_{15} x_4^3 + c_{16} x_4^2 + c_{17} x_4 + c_{18}$
$n_5 = x_4^4 n_4$
$n_6 = \frac{c_{10} n_3}{n_5}$
$n_7 = \exp^{n_2 n_6}$
$n_8 = c_{20} x_4^3 + c_{21} x_4^2 + c_{22} x_4 + c_{23}$
$n_9 = c_{24} x_4 + c_{25}$
$n_{10} = c_{26} n_3$
$n_{11} = x_4^3 n_4$
$n_{12} = c_{27} x_4^4 + c_{28} x_4^3 + c_{29} x_4^2 + c_{30} x_4 + c_{31}$
$n_{13} = x_5^{c_{33}} x_4 n_4$
$n_{14} = b_2 + b_3 x_5^{c_{12}}$
$n_{15} = x_5 - b_5 x_1 - b_6 x_3 - b_7 m_{v, ca}(x_9)$
$n_{16} = \frac{n_1 0}{n_{11}} - \frac{c_{10} n_3 n_{12}}{x_4^2 n_4^2}$